# Билет 26. Нелинейная Марковская фильтрация

**Из текста ниже важно попытаться осознать формулы и осознать часть про сравнение с расширенным Калманом. В итоге вся страшная математика – это просто добавление некоторого коэффициента в уравнение коррекции и расчета усиления фильтра.**

**Вероятно в этот вопрос (и все, касающиеся ТАУ) надо просто вставить разговор про то, что есть такой подход к оцениванию состояния. В случае использования рядов Тейлора есть расширенный Калман, если брать только первые производные, и марковский, если учитывать вторые производные.**

**1 Оптимальный нелинейный марковский фильтр**

Вектор состояния, действительный сигнал и наблюдаемый сигнал обозначаются соответственно:, , .

Уравнение наблюдения записывается в форме:

, (1.1)

где, , ,  – шум наблюдения,  – вектор состояния в момент времени *k*.

Ковариационная матрица апостериорных ошибок оценивания:

 (1.2)

где M[] – обозначает математическое ожидание, а  – оценка вектора состояния на *k*–1 шаге.

Вычисление оценки вектора состояния проводится в соответствии с формулой:

 . (1.3)

Учитывая

 (1.4)

выражение для первой производной уравнения наблюдения по вектору параметров в (1.3) может быть записано как

, (1.5)

где *N* – размер вектора параметров, *M* – размер вектора наблюдения (количество измеряемых параметров).

Коэффициент **B2**, в уравнении (1.3) учитывает вторую производную функции наблюдения по вектору параметров и может быть выражен как

, (1.6)

где  – вторая производная *i*-ого уравнения функции наблюдения  по *i*-ому и *j*-ому элементу вектора параметров .

Ковариационная матрица апостериорных ошибок оценивания корректируется в соответствии с уравнением:

,(1.7)

Коэффициент  рассчитывается при помощи формулы:

, (1.8)

где  – коэффициент, учитывающий вторую производную уравнения наблюдения:

. (1.9)

В данном варианте алгоритма отсутствует предсказание вектора параметров и ковариационной матрицы ошибок.

**2 Сравнение с расширенным фильтром Калмана**

Рассмотрим уравнения (1.1)–(1.9), используя обозначения, применяемые нами для описания расширенного фильтра Калмана. Вектор состояния, действительный и наблюдаемый сигнал на *k*-ом шаге обозначим соответственно ,  и .

Уравнение (1.1) запишем соответственно в виде:

, (2.1)

Выражение (1.5) является матрицей

, (2.2)

Ковариационную матрицу апостериорных ошибок оценивания () обозначим как   
, а шум наблюдения (), как  и перепишем с учетом (2.2) и новых обозначений уравнения (1.3), (1.7) и (1.8):

, (2.3)

, (2.4)

. (2.5)

Пусть

 (2.6)

Данное выражение очень «напоминает» коэффициент усиления в расширенном фильтре Калмана, однако в нем присутствует дополнительный коэффициент . Подставляя  в уравнения (2.3), (2.4) получим:

, (2.7)

, (2.8)

где  – единичная матрица, а (2.7) отличается от коррекции в расширенном фильтре Калмана дополнительным членом .

Коэффициенты **B2** и **B3** в уравнениях (2.6) и (2.7) имеют соответственно вид:

 , (2.9)

. (2.10)

Таким образом, оптимальный нелинейный марковский фильтр реализует этап коррекции вектора параметров и ковариационной матрицы апостериорной ошибки оценки с использованием дополнительных коэффициентов, учитывающих вторую производную уравнения наблюдения по вектору параметров.

С учетом того, что известна модель эволюции вектора параметров:

 (2.11)

к данному фильтру был добавлен этап предсказания оценки вектора параметров и ковариационной матрицы:

, (2.12)

, (2.13)

где – шум системы.

Таким образом, полученный оптимальный нелинейный марковский фильтр отличается от расширенного фильтра Калмана наличием коэффициентов **B2** и **B3** и может быть реализован последовательным применением приведенных ниже соотношений:

Таблица 1.

|  |  |
| --- | --- |
| **Уравнение** | **Комментарий** |
|  | Предсказание вектора параметров |
|  | Предсказание ковариационной матрицы апостериорных ошибок оценивания |
|  | Коррекция вектора параметров |
|  | Коррекция ковариационной матрицы апостериорных ошибок оценивания |

Результаты работы оптимального нелинейного марковского фильтра практически совпадают с результатами работы расширенного фильтра Калмана, т.к. единственным отличием между двумя данными алгоритмами являются добавочные коэффициенты **B2** и **B3**, а их вклад мал. Следует отметить, что результаты работы в значительной степени зависят от начальных условий (начального значения компонентов вектора параметров и ковариационной матрицы ошибок).